数理解析研究所講究録
764巻 1991年 69-72

実関数芽の変形について

東工大D1 友延 政彦 (Masahiko Tomonobu)

$f_0 : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}, 0$ を、原点で代数的孤立特異点をもつ実解析関数芽とし、$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, 0$ を、その実解析変形とする。ここでは、関数f_0の特異点が、変形fによってどう分岐するかを位相的にとらえ、それを代数的に表現することを考えた。

変形fを位相的にとらえようとするとき、基礎的で重要な問題は、その変形が位相的に自明となるか否かを決定することである。(変形fは、$h(x,t) = (\tilde{h}(x,t), t)$ なる形をもつ位相同型の芽 $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \times \mathbb{R}^p$ で、$f \circ h(x,t) = f_0(x)$ をみたすものが存在するとき、位相的に自明であるという。) 複素の場合、同様の問題に対し、Lê-Ramanujam, Timourian らの結果によってfの位相的自明性は f_t ($f_t(x) = f(x,t)$) の原点におけるMilnor数一定というすっきりした条件で特徴付けられている ($n \neq 3$, [L-R], [T])。しかしいまのように実関数の場合には、King ([K])

の結果が示しているように位相的情報が、複素の場合のように代数的情報におきかえられず、変形 f が位相的に自明になるか否かを判別することは一般に難かしいことがわかっている。それでも f_0 が2変数関数の場合には、特異点がもつ位相的情報が少ないため、Kingの結果を使って変形 f が位相的自明か否かを代数的に表現することができた。

命題　$n=2$ のとき、f が位相的に自明であることは、
$\deg_0(df_t)$ が一定で $\deg_a(df_t)\neq 0$ なる f_t の特異点 a が $0\times\mathbb{R}^p$ から分岐しないことと、同値である。

（$\varphi:\mathbb{R}^n,a\to\mathbb{R}^n,0$ で、a の近くで $\varphi^{-1}(0)=a$ をみたす写像芽に対し、φ の a における局所写像度 $\deg_a(\varphi)$ を

$\deg_a(\varphi)=\varphi/|\varphi|:S_\varepsilon^{n-1}\to S^{n-1}$ の写像度,

で定義する。$S_\varepsilon^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n;\|x\|=\varepsilon\}$, $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n;\|x\|=1\}$）

（注意　局所写像度は、Eisenbud-Levine ([E-L]) の定理によって、代数的に計算できる。）

一般の n に対しては、上のようなことは成立しないが、特異的のもつ弱い位相的情報として、グラディアント写像の局所写像度に着目し、その分岐について、次の結果を得た。

n を一般のものとし、$p=1$ とする。$g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0\to\mathbb{R},0$ を任意の実解析関数芽とする。$f_t^+=f_{t^2}$, $g_t^+=g_{t^2}$ とおく。$F^i=(F_1,\cdots,F_n,F_{n+1}^i):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0$

F^i ($i=1,2$)を、$F_1 = \partial f^+/\partial x_1, \cdots, F_n = \partial f^+/\partial x_n, F^1_{n+1} = t\cdot g^+ + t^l$, $F^2_{n+1} = t\cdot(g^+)^2 + t^l$ (lは十分大きな整数)で定義する。このとき次が成り立つ。

定理

1. lが十分大きな整数ならば、F^i ($i=1,2$) は finite な写像芽となる。

2. lが十分大きな偶数ならば、

$\deg_0(F^1) = \left(\begin{array}{l} t>0, g>0 \text{ へ分岐する } f_t \text{ の特異点} \\ a \text{ での } \deg_a(df_t) \text{ の和。} \end{array}\right)$

$- \left(\begin{array}{l} t>0, g<0 \text{ へ分岐する } f_t \text{ の特異} \\ \text{点 } a \text{ での } \deg_a(df_t) \text{ の和。} \end{array}\right)$,

$\deg_0(F^2) = \left(\begin{array}{l} t>0, g\neq 0 \text{ へ分岐する } f_t \text{ の特異点} \\ a \text{ での } \deg_a(df_t) \text{ の和。} \end{array}\right)$,

が成り立つ。

(注意　この定理は 西村－福田－青木、各氏による定理に触発され得られたものである([N-F-A])。)

最後に、上の結果を得るまでの期間に、有意義な助言、励ましを与えて下さった福田拓生先生に、感謝の意を表します。

参考文献

[E-L] D. Eisenbud & H. I. Levine, "An algebraic formura for the degree of a C^{∞} map-germ", Ann. Math. 106 (1977), 19–38.

[K] H. C. King, "Topological type in families of germs", Invent. Math. 62 (1980) 1–31.

[L-R] Lê Dũng Tráng & C. P. Ramanujam, "The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type", Amer. J. Math. Vol. 98, No. 1 (1976) 67–78.

[N-F-A] T. Nishimura, T. Fukuda & K. Aoki, "An algebraic formula for the topological types of one parameter bifurcation diagrams", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 108 (1989) 247–265.

[T] J. G. Timourian, "The invariance of Milnor's number implies topological triviality", Amer. J. Math. Vol. 99, No. 2 (1977), 437–446.